

**Контрольная работа № 1**  
**«Элементы алгебры и геометрии»**

Найти матрицу  $D = AB - 2C$ .

20.  $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$

Произведение двух матриц  $A$  и  $B$  определяется равенством:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^3 a_{1j}b_{j2} & \sum_{j=1}^3 a_{1j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^3 a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^3 a_{2j}b_{j2} & \sum_{j=1}^3 a_{2j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^3 a_{3j}b_{j1} & \sum_{j=1}^3 a_{3j}b_{j2} & \sum_{j=1}^3 a_{3j}b_{j3} \end{pmatrix}$$

Операция умножения двух матриц выполнима только в том случае, если число столбцов в первом сомножителе равно числу строк во втором. Для матриц  $A$  и  $B$  это условие выполняется. Поэтому находим:

$$AB = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [6 \cdot 1 + 0 \cdot (-2)] & [6 \cdot 1 + 0 \cdot 0] \\ [1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2)] & [1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0] \\ [7 \cdot 1 + 0 \cdot (-2)] & [7 \cdot 1 + 0 \cdot 0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 5 & 1 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Результатом является матрица с числом строк как у первого сомножителя и числом столбцов как у второго сомножителя, т.е.  $3 \times 2$ .

Произведением числа  $m$  на матрицу  $C$  называется матрица, определяемая равенством

$$m \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma_{11} & ma_{12} & ma_{13} \\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23} \\ ma_{31} & ma_{32} & ma_{33} \end{pmatrix}$$

Отсюда находим матрицу как произведение числа  $-2$  на матрицу  $C$ :

$$-2C = -2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 4 & -2 \cdot (-2) \\ -2 \cdot 1 & -2 \cdot (-1) \\ -2 \cdot 0 & -2 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -2 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Суммой двух матриц  $A$  и  $B$  называется матрица, определяемая равенством:

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

Отсюда находим сумму матриц  $AB$  и  $-2C$ :

$$D = AB - 2C = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 5 & 1 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -2 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-8 & 6+4 \\ 5-2 & 1+2 \\ 7-0 & 7-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 3 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Дана невырожденная матрица  $A$ . Найти обратную матрицу  $A^{-1}$  и пользуясь правилом умножения матриц, показать, что  $A \cdot A^{-1} = E$ , где  $E$  – единичная матрица.

$$40. \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления обратной матрицы воспользуемся формулой:

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

где D – определитель матрицы A;

$A_{11}, A_{12}, \dots, A_{33}$  – алгебраические дополнения элементов  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$  матрицы A.

Определитель или детерминант данной матрицы равен:

$$\Delta = 0 \cdot 2 \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) \cdot 0 + 4 \cdot (-1) \cdot 0 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) - (-3) \cdot (-1) \cdot 3 - 0 \cdot 0 \cdot 0 = \\ = 0 + 0 + 0 + 8 - 9 - 0 = -1$$

Вычислим алгебраические дополнения всех элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -8;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -3.$$

Составим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 9 & 4 & 3 \\ -8 & -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 & -2 \\ -9 & -4 & -3 \\ 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

В задачах **41 – 60** решить системы линейных уравнений с тремя неизвестными.

$$60. \quad \begin{cases} 3x + y + z = 21 \\ x - 4y - 2z = -16 \\ -3x + 5y + 6z = 41 \end{cases}.$$

Найдем детерминант (определитель) матрицы данной системы уравнений:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 3 \cdot (-4) \cdot 6 + (-3) \cdot 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 5 \cdot 1 - (-3) \cdot (-4) \cdot 1 - 3 \cdot 5 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 \cdot 6 = -49$$

Поскольку детерминант матрицы отличен от нуля, то заданная система имеет решение и притом только одно.

Данную систему можно записать в матричном виде  $AX = B$ ,

$$\text{где} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 21 \\ -16 \\ 41 \end{pmatrix}$$

Решение матричного уравнения имеет вид  $X = A^{-1}B$ , где  $A^{-1}$  – матрица, обратная матрице  $A$ . Так как определитель матрицы системы  $\Delta = -49$  отличен от нуля то матрица  $A$  имеет обратную матрицу. Для вычисления обратной матрицы воспользуемся формулой:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Где  $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{33}$  – алгебраические дополнения элементов  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$  матрицы  $A$ . Вычислим алгебраические дополнения всех элементов матрицы  $A$ :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -14 \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 21 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -18$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -13$$

Составим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{-49} \cdot \begin{pmatrix} -14 & -1 & 2 \\ 0 & 21 & 7 \\ -7 & -18 & -13 \end{pmatrix}.$$

Найдем теперь матрицу  $X$ :

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{-49} \cdot \begin{pmatrix} -14 & -1 & 2 \\ 0 & 21 & 7 \\ -7 & -18 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ -16 \\ 41 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-49} \cdot \begin{pmatrix} -14 \cdot 21 + (-1) \cdot (-16) + 2 \cdot 41 \\ 0 \cdot 21 + 21 \cdot (-16) + 7 \cdot 41 \\ -7 \cdot 21 + (-18) \cdot (-16) + (-13) \cdot 41 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-49} \cdot \begin{pmatrix} -294 + 16 + 82 \\ 0 - 336 + 287 \\ -147 + 288 - 533 \end{pmatrix} = \frac{1}{-49} \cdot \begin{pmatrix} -196 \\ -49 \\ -392 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

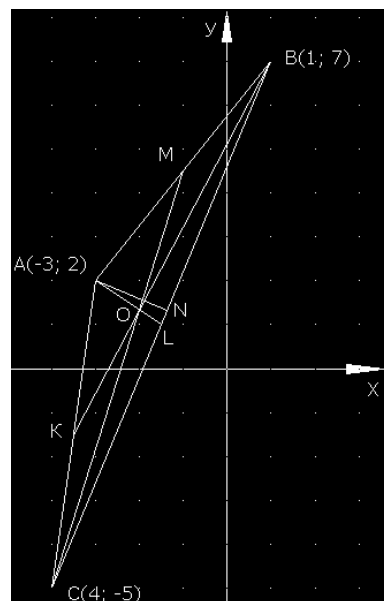
Из равенства  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$  следует решение системы  $x = 4, y = 1, z = 8$ .

В задачах **61 – 80** построить треугольник, вершины которого находятся в точках  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ . Найти:

1. уравнения сторон треугольника  $ABC$ ;
2. координаты точки пересечения медиан;
3. длину и уравнение высоты, опущенной из вершины  $A$ ;
4. площадь треугольника.

**80.**  $A(-3; 2)$ ,  $B(1; 7)$ ,  $C(4; -5)$ .

Для наглядности построим чертеж:



1. Для нахождения уравнения сторон  $AB$  и  $BC$  и  $CA$  воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки с координатами  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Подставив значения координат точек  $A$  и  $B$ , получим уравнение стороны  $AB$ :

$$\frac{x - (-3)}{1 - (-3)} = \frac{y - 2}{7 - 2} \quad \text{или} \quad \frac{x + 3}{4} = \frac{y - 2}{5}$$

Проведя арифметические преобразования, находим уравнение стороны  $AB$  в общем виде (1) и с угловым коэффициентом (2):

$$5x + 5 \cdot 3 = 4y - 4 \cdot 2$$

$$5x - 4y + 23 = 0 \quad (1)$$

$$y = 1,25x + 5,75 \quad (2)$$

Подставив значения координат точек  $B$  и  $C$ , получим уравнение стороны  $BC$ :

$$\frac{x - (-4)}{1 - (-4)} = \frac{y - (-5)}{7 - (-5)} \quad \text{или} \quad \frac{x + 4}{5} = \frac{y + 5}{12}$$

Проведя арифметические преобразования, находим уравнение стороны  $BC$  в общем виде (3) и с угловым коэффициентом (4):

$$12x + 12 \cdot 4 = 5y + 5 \cdot 5$$

$$12x - 5y + 23 = 0 \quad (3)$$

$$y = \frac{12}{5}x + \frac{23}{5} \quad (4)$$

Подставив значения координат точек А и С, получим уравнение стороны АС:

$$\frac{x - (-4)}{(-3) - (-4)} = \frac{y - (-5)}{2 - (-5)} \quad \text{или} \quad \frac{x + 4}{1} = \frac{y + 5}{7}$$

Проведя арифметические преобразования, находим уравнение стороны АС в общем виде (5) и с угловым коэффициентом (6):

$$7x + 7 \cdot 4 = y + 5$$

$$7x - y + 23 = 0 \quad (5)$$

$$y = 7x + 23 \quad (6)$$

2. Из геометрии известно, что все три медианы треугольника пересекаются в одной точке и эта точка делит каждую медиану на два отрезка в пропорции 2:1 (от вершины к основанию). Поэтому достаточно найти координаты точек М и О медианы СМ.

Точка М медианы СМ делит сторону АВ пополам, следовательно ее координаты равны полусумме координат точек А и В:

$$x_M = [(-3) + 1]/2 = -1 \quad y_M = (2 + 7)/2 = 4,5$$

Точка О медианы СМ делит медиану СМ на два отрезка СО и ОМ в пропорции 2:1, а координаты точки О(х, у), делящей отрезок с координатами концов (х<sub>1</sub>, у<sub>1</sub>) и (х<sub>2</sub>, у<sub>2</sub>) в отношении **α:β** находятся по формулам:

$$x = \frac{\alpha \cdot x_2 + \beta \cdot x_1}{\alpha + \beta} \quad y = \frac{\alpha \cdot y_2 + \beta \cdot y_1}{\alpha + \beta}$$

Поскольку концами отрезка являются точки С(-4; -5) и М(-1; 4,5) и α = 2, β = 1, то находим:

$$x_O = \frac{2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-4)}{2 + 1} = -2$$

$$y_O = \frac{2 \cdot 4,5 + 1 \cdot (-5)}{2 + 1} = \frac{4}{3} \approx 1,33$$

3. Уравнение высоты AN имеет вид  $y = a \cdot x + b$ , причем, поскольку AN и BC перпендикулярны, то коэффициенты при  $x$  в уравнениях этих прямых будут обратными по отношению к друг другу и противоположными по знаку. Коэффициент в уравнении (4) равен  $12/5$ , следовательно, уравнение высоты AN приобретает вид  $y = (-5/12) \cdot x + b$ . Подставив значения координат точки A  $-3; 2$ , принадлежащей высоте AN, найдем коэффициент  $b$ :

$$2 = -\frac{5}{12} \cdot (-3) + b \quad \Rightarrow \quad b = 2 - 5/4 = 3/4$$

Следовательно, уравнение высоты AN будет иметь вид:

$$y = -\frac{5}{12} \cdot x + \frac{3}{4} \quad \text{или} \quad 5x + 12y - 9 = 0 \quad (7)$$

Что бы найти координаты точки N, решим систему уравнений прямых AN (7) и BC (3), к которым одновременно принадлежит точка N:

$$\begin{cases} 5x + 12y - 9 = 0 \\ 12x - 5y + 23 = 0 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 12, а второе – на 5:

$$\begin{cases} 60x + 144y - 108 = 0 \\ 60x - 25y + 115 = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения вычтем первое уравнение:

$$\begin{cases} 60x + 144y - 108 = 0 \\ -169y + 223 = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения находим:

$$y_N = 223/169 = 1,32$$

Из первого уравнения находим:

$$x_N = (-144 \cdot 1,32 + 108)/60 = -1,15$$

Расстояние между точками с координатами A ( $x_A$ ;  $y_A$ ) и N ( $x_N$ ;  $y_N$ ) находится по формуле:

$$AN = \sqrt{(x_A - x_N)^2 + (y_A - y_N)^2} = \sqrt{(-3 + 1,15)^2 + (2 - 1,32)^2} = 1,97 \text{ (лин.ед.)}$$

4. Площадь треугольника можно найти как половину произведения длины высоты  $AN$  на длину стороны  $BC$ . Длину стороны  $BC$  найдем по формуле:

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(1+4)^2 + (7+5)^2} = \sqrt{25+144} = 13$$

Отсюда площадь  $\triangle ABC$  будет равна:

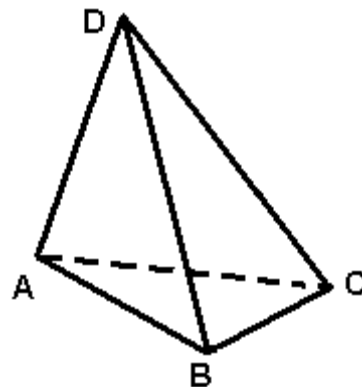
$$S_{\triangle ABC} = 0,5 \cdot 1,97 \cdot 13 = 12,8 \text{ (кв.ед.)}$$

В задачах **81 – 100** даны координаты точек  $A \ x_1, y_1, z_1$  ,  $B \ x_2, y_2, z_2$  ,  $C \ x_3, y_3, z_3$  ,  $D \ x_4, y_4, z_4$  . Найти:

1. найти длину ребра  $AB$  ;
2. уравнение плоскости, проходящей через точки  $A, B$  и  $C$ ;
3. уравнение высоты опущенной из точки  $D$  на плоскость  $ABC$ ;
4. площадь грани  $ABC$ ;
5. объем пирамиды  $ABCD$ .

**100.**  $A \ 6; -1; 1$  ,  $B \ 2; 3; 4$  ,

$C \ 3; -3; 0$  ,  $D \ 4; 4; 7$  .



Выполним примерный чертеж пирамиды, образованной заданными точками:

1. Длину ребра  $AB$  находим как длину вектора с координатами, равными разнице координат точек начала и конца вектора  $\{(x_1 - x_2), (y_1 - y_2), (z_1 - z_2)\}$  по формуле:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = \sqrt{(6 - 2)^2 + (-1 - 3)^2 + (1 - 4)^2} =$$

$$= \sqrt{16 + 16 + 9} = \sqrt{41} = 6,40$$

2. Общее уравнение плоскости имеет вид  $ax + by + cz + d = 0$  или разделив на  $D$  перепишем  $a_1x + b_1y + c_1z + 1 = 0$ . Подставив последовательно значения координат трех точек плоскости  $A, B$  и  $C$  получим систему трех уравнений с тремя неизвестными, решив которую можно найти значения коэффициентов уравнения плоскости:

$$\begin{cases} 6a_1 - b_1 + c_1 + 1 = 0 \\ 2a_1 + 3b_1 + 4c_1 + 1 = 0 \\ 3a_1 - 3b_1 + 0 + 1 = 0 \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на 3 и третье уравнение на 2:

$$\begin{cases} 6a_1 - b_1 + c_1 + 1 = 0 \\ 6a_1 + 9b_1 + 12c_1 + 3 = 0 \\ 6a_1 - 6b_1 + 0 + 2 = 0 \end{cases}$$

Вычтем первое уравнение из второго и из третьего уравнений, тем самым избавимся от неизвестного  $a_1$  во втором и третьем уравнениях:

$$\begin{cases} 6a_1 - b_1 + c_1 + 1 = 0 \\ 10b_1 + 11c_1 + 2 = 0 \\ -5b_1 - c_1 + 1 = 0 \end{cases}$$

Умножим третье уравнение на 2 и прибавим к нему второе уравнение:

$$\begin{cases} 6a_1 - b_1 + c_1 + 1 = 0 \\ 10b_1 + 11c_1 + 2 = 0 \\ 9c_1 + 4 = 0 \end{cases}$$

Из третьего уравнения находим:  $c_1 = -4/9$

Из второго уравнения находим:  $b_1 = -11 \cdot (-4/9) / 10 = 22/45$

Из первого уравнения:  $a_1 = (22/45 + 4/9 - 1) / 6 = -1/30$

Таким образом, имеем уравнение плоскости ABC:

$$(-1/30) \cdot x + (22/45) \cdot y + (-4/9) \cdot z + 1 = 0$$

Умножая на  $-90$ , получаем уравнение плоскости ABC в общем виде:

$$3x - 44y + 40z - 90 = 0$$

3. Вектор  $N$ , перпендикулярный плоскости  $ax + by + cz + d = 0$ , имеет координаты  $\{a, b, c\}$ , равные коэффициентам уравнения плоскости. Таким образом, что бы получить уравнение высоты, нам необходимо составить уравнение прямой, параллельной вектору  $N$  с координатами  $\{3, -44, 40\}$ , и проходящей через точку  $D$  с координатами  $x_D = 4, y_D = 4, z_D = 7$ . Уравнение такой прямой имеет вид:

$$\frac{x - x_D}{a} = \frac{y - y_D}{b} = \frac{z - z_D}{c}$$

Подставляем числовые значения и получаем уравнение высоты, опущенной из точки  $D$  на плоскость ABC:

$$\frac{x - 4}{3} = \frac{y - 4}{-44} = \frac{z - 7}{40}$$

4. Площадь грани ABC найдем как половину площади параллелограмма, построенного на векторах AB и AC, которая, в свою очередь, равна модулю векторного произведения этих векторов. Модуль векторного произведения векторов с координатами  $\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$  и  $\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$  в прямоугольной декартовой системе координат находится по формуле:

$$|AB \cdot AC| = \sqrt{(\alpha_1 \cdot \beta_2 - \beta_1 \cdot \alpha_2)^2 + (\beta_1 \cdot \gamma_2 - \gamma_1 \cdot \beta_2)^2 + (\gamma_1 \cdot \alpha_2 - \alpha_1 \cdot \gamma_2)^2}$$

Координаты вектора равны разнице координат конца и начала вектора. Для вектора AB координаты равны:  $\{(2-6), (3-(-1)), (4-1)\} = \{-4, 4, 3\}$ .

Координаты вектора AC равны  $\{(3-6), (-3-(-1)), (0-1)\} = \{-3, -2, -1\}$ :

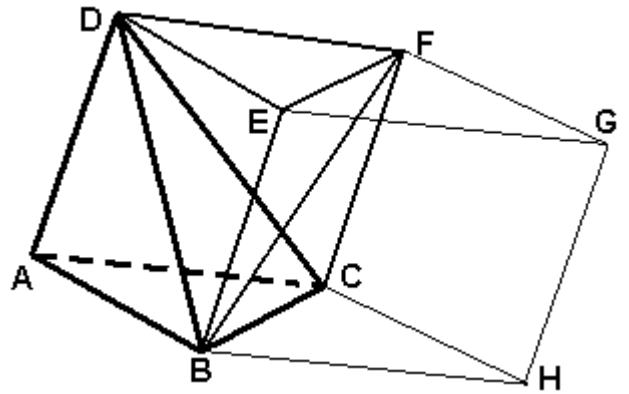
С учетом этого находим площадь грани ABC:

$$S_{ABC} = 0,5 \cdot \sqrt{[(-4) \cdot (-2) - 4 \cdot (-3)]^2 + [4 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2)]^2 + [3 \cdot (-3) - (-4) \cdot (-1)]^2} =$$

$$= 0,5 \cdot \sqrt{(8+12)^2 + (-4+6)^2 + (-9-4)^2} = 0,5 \cdot \sqrt{400+4+169} = 11,97 \text{ (кв.ед.)}$$

Достроим заданную пирамиду  $ABCD$  до призмы  $ABCDEF$ .

Так как  $\Delta ABC = \Delta DEF$ , то объемы пирамид  $ABCD$  и  $BEFD$ , как имеющих одинаковые высоты, равные расстоянию между плоскостями  $ABC$  и  $DEF$ , будут равны между собой. В тоже время объемы пирамид  $BEFD$  и  $BCFD$  также будут равны, поскольку равны их основания ( $\Delta BEF = \Delta BCF$ ) и обе пирамиды имеют общую высоту (то есть перпендикуляр, опущенный из вершины  $D$  на плоскость  $BEFC$ ). Из всего этого следует, что заданная пирамида  $ABCD$  является одним из трех одинаковых по объему тел составляющих призму  $ABCDEF$ , то есть объем пирамиды  $ABCD$  равен  $1/3$  объема призмы  $ABCDEF$ .



Если призму  $ABCDEF$  достроить до параллелепипеда  $ABCDEF GH$ , то будет очевидно, объем призмы  $ABCDEF$  равен половине объема параллелепипеда  $ABCDEF GH$ . Таким образом, окончательно получаем, что объем заданной пирамиды можно найти как  $1/6$  часть объема параллелепипеда, построенного на векторах  $AB$ ,  $AC$  и  $AD$ , а как известно такой объем равен одной шестой смешанного произведения этих векторов или  $(1/6) \cdot (AB \cdot AC \cdot AD)$ .

Координаты данных векторов соответственно равны:

$$AB: \{ (2-6), (3-(-1)), (4-1) \} = \{-4, 4, 3\},$$

$$AC: \{ (3-6), (-3-(-1)), (0-1) \} = \{-3, -2, -1\},$$

$$AD: \{ (4-6), (4-(-1)), (7-1) \} = \{-2, 5, 6\},$$

Смешанное произведение векторов с координатами  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ ,  $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$  и  $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$  находится как детерминант матрицы третьего порядка:

$$(AB \cdot AC \cdot AD) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 4 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= (-4) \cdot (-2) \cdot 6 + (-7) \cdot 4 \cdot (-1) + (-3) \cdot 3 \cdot 5 - (-7) \cdot (-2) \cdot 3 - (-4) \cdot 5 \cdot (-1) - (-3) \cdot 4 \cdot 6 =$$

$$= 48 + 28 - 45 - 42 - 20 + 72 = 41$$

Отсюда находим объем тетраэдра:

$$V_{ABCD} = (1/6) \cdot 41 = 41/6 \approx 6,83 \text{ (кубических единицы)}.$$

**Контрольная работа № 2**  
**«Производная и дифференциал»**

В задачах **101 – 120** найти указанные пределы.

**120.** а)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{1-x} - 3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 6x^2 - x}{x + 2x^3 - 7}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$ .

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{1-x} - 3} = \frac{(-2)^2 - 4}{\sqrt{1-(-2)} - 3} = \frac{4 - 4}{\sqrt{3} - 3} = \frac{0}{-1,2579} = 0$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 6x^2 - x}{x + 2x^3 - 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{6}{x} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x^2} + 2 - \frac{7}{x^3}} = \frac{5 + \frac{6}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{\frac{x}{\infty} + 2 - \frac{7}{\infty}} =$$

$$= \frac{5 + 0 - 0}{0 + 2 - 0} = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x} =$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 2 \cdot 1 = 2$$

В задачах **121 – 140** для каждой из заданных функций найти точки разрыва и исследовать их характер.

**140.**  $y = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \sqrt{x}, & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$ .

Заданная функция не имеет точек разрыва, так как зависимая переменная  $y$  определена при любых значениях независимой переменной  $x$ . В точке  $x = 0$  функция имеет левый и правый пределы равные между собой и равные 0.

В задачах **141 – 160** найти производные заданных функций.

$$\mathbf{160.} \quad \text{a) } y = \frac{\cos x}{e^x}; \quad \text{б) } y = \operatorname{tg}^4 x^2 + 1; \quad \text{в) } y = \ln \left( \frac{x^2 + 3}{x^3 + 9x} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{a) } y' &= \left( \frac{\cos x}{e^x} \right)' = \frac{(\cos x)' \cdot e^x - \cos x \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} = \\ &= \frac{-\sin x \cdot e^x - \cos x \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x \cdot (-\sin x - \cos x)}{e^{2x}} = \frac{-\sin x - \cos x}{e^x} \end{aligned}$$

$$\text{б) } y' = 4 \operatorname{tg} (x^2 + 1) \cdot (x^2 + 1)' = 4 \operatorname{tg} (x^2 + 1) \cdot (2x + 0) = 8x \cdot \operatorname{tg} (x^2 + 1)$$

$$\begin{aligned} \text{в) } y' &= \left[ \ln \left( \frac{x^2 + 3}{x^3 + 9x} \right) \right]' = \frac{1}{\frac{x^2 + 3}{x^3 + 9x}} \cdot \left( \frac{x^2 + 3}{x^3 + 9x} \right)' = \\ &= \frac{x^3 + 9x}{x^2 + 3} \cdot \frac{(x^2 + 3)' \cdot (x^3 + 9x) - (x^2 + 3) \cdot (x^3 + 9x)'}{(x^3 + 9x)^2} = \\ &= \frac{1}{x^2 + 3} \cdot \frac{2x \cdot (x^3 + 9x) - (x^2 + 3) \cdot (3x^2 + 9)}{x^3 + 9x} = \\ &= \frac{2x^4 + 18x^2 - 3x^4 - 18x^2 - 27}{(x^2 + 3) \cdot (x^3 + 9x)} = \frac{-x^4 - 27}{(x^2 + 3) \cdot (x^3 + 9x)} \end{aligned}$$

В задачах **161 – 180** найти дифференциалы второго порядка.

$$\mathbf{180.} \quad y = x^2 \cdot 3^x.$$

$$y' = (x^2)' \cdot 3^x + x^2 \cdot (3^x)' = 2x \cdot 3^x + x^2 \cdot 3^x \cdot \ln 3 = x \cdot 3^x \cdot (2 + \ln 3^x)$$

$$y'' = [x \cdot 3^x \cdot (2 + \ln 3^x)]' = x' \cdot 3^x \cdot (2 + \ln 3^x) + x \cdot [3^x \cdot (2 + \ln 3^x)]' =$$

$$= 3^x \cdot (2 + \ln 3^x) + x \cdot [(3^x)' \cdot (2 + \ln 3^x) + 3^x \cdot (2 + \ln 3^x)'] =$$

$$= 3^x \cdot (2 + \ln 3^x) + x \cdot [3^x \cdot \ln 3 \cdot (2 + \ln 3^x) + 3^x \cdot \frac{3^x \cdot \ln 3}{3^x}] =$$

$$\begin{aligned}
&= 3^x \cdot [(2 + \ln 3^x) + x \cdot \ln 3 \cdot (2 + \ln 3^x) + x \cdot 3^x \cdot \ln 3] = \\
&= 3^x \cdot (2 + \ln 3^x + 2 \ln 3^x + (\ln 3^x)^2 + \ln 3^x) = \\
&= 3^x \cdot [2 + 4 \ln 3^x + (\ln 3^x)^2] = 3^x \cdot [2 + \ln 3^x \cdot (4 + \ln 3^x)] = \\
&= 3^x \cdot [2 + \ln 3^x \cdot \ln(e^4 \cdot 3^x)] =
\end{aligned}$$

В задачах **181 – 200** исследовать данные функции методами дифференциального исчисления и построить их графики.

**200.**  $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$

Исследование функции выполним по следующей схеме:

1. Найдем область определения;
2. Проверим четность-нечетность функции;
3. Найдем точки пересечения с осями координат и знаки функции;
4. Найдем экстремумы и интервалы монотонности;
5. Найдем точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости;
6. Найдем пределы функции при  $x \rightarrow \pm\infty$ ;
7. Построим график функции.

1. Заданная функция определена на всей оси OX поскольку знаменатель функции не обращается в ноль ни при каком значении аргумента.

2) Функция является четной, так как  $y(-x) = y(x)$ :

$$y(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = y(x)$$

Следовательно, график функции симметричен относительно оси Y.

3) При  $x = 0$ ,  $y = -1$ , следовательно, график функции пересекает ось Y в точке с координатами  $(0; -1)$ .

При  $y = 0$ , приравняв к нулю можно только числитель  $x^2 - 1$ , который будет равен нулю при  $x = \pm 1$ , следовательно, график функции пересекает ось X в точках с координатами  $(-1; 0)$  и  $(+1; 0)$ .

Очевидно, что знаменатель функции, имея 2-ю степень аргумента, всегда имеет положительное значение. Поэтому знак функции зависит от знака числителя. Числитель может быть отрицательным только при  $x^2 < 1$  или при  $-1 < x < +1$ . Поэтому на участке  $x$  от  $-\infty$  до  $-1$  функция положительна ( $y > 0$ ). На участке  $x$  от  $-1$  до  $+1$  функция отрицательна,  $y < 0$ . На участке  $x$  от  $+1$  до  $+\infty$  функция снова положительна,  $y > 0$ .

4) Первая производная функции равна:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{(x^2 - 1)' \cdot (x^2 + 1) - (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \\
&= \frac{(2x - 0) \cdot (x^2 + 1) - (x^2 - 1) \cdot (2x + 0)}{(x^2 + 1)^2} = \\
&= \frac{2x \cdot [(x^2 + 1) - (x^2 - 1)]}{(x^2 + 1)^2} = \\
&= \frac{2x \cdot (x^2 + 1 - x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}
\end{aligned}$$

Приравняв производную к нулю, получим точку экстремума  $x = 0$ . В этой точке  $y = -1$ . Отсюда делаем вывод, что функция имеет критическую точку  $C_1(0; -1)$ .

Поскольку знаменатель во 2-й степени всегда имеет положительное значение, то ясно, что первая производная будет отрицательна, при  $x < 0$  и положительна при  $x > 0$ . Следовательно, первая производная будет отрицательна в интервале  $[-\infty; 0]$  и по теореме о достаточном признаке монотонности функция в этом интервале будет убывать. Соответственно в интервале  $[0; +\infty]$  первая производная будет положительна и функция будет возрастать.

Согласно первому достаточному признаку экстремума точка  $C_1(0; -1)$ , в которой убывание сменяется возрастанием, является точкой минимума.

5) Вторая производная функции равна:

$$\begin{aligned}
y'' &= \left( \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \right)' = \frac{(4x)' \cdot (x^2 + 1)^2 - 4x \cdot [(x^2 + 1)^2]'}{(x^2 + 1)^4} = \\
&= \frac{4 \cdot (x^2 + 1)^2 - 4x \cdot 2 \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^4} = \\
&= \frac{4 \cdot (x^2 + 1)^2 - 8x \cdot (x^2 + 1) \cdot (2x + 0)}{(x^2 + 1)^4} = \\
&= \frac{4 \cdot (x^2 + 1)^2 - 8x^2 \cdot (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4} = \frac{4 \cdot (1 - 2x^2) \cdot (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{4 \cdot (1 - 2x^2)}{(x^2 + 1)^3}$$

Приравняв вторую производную к нулю, получим точку  $x = \pm \sqrt{0,5}$ .

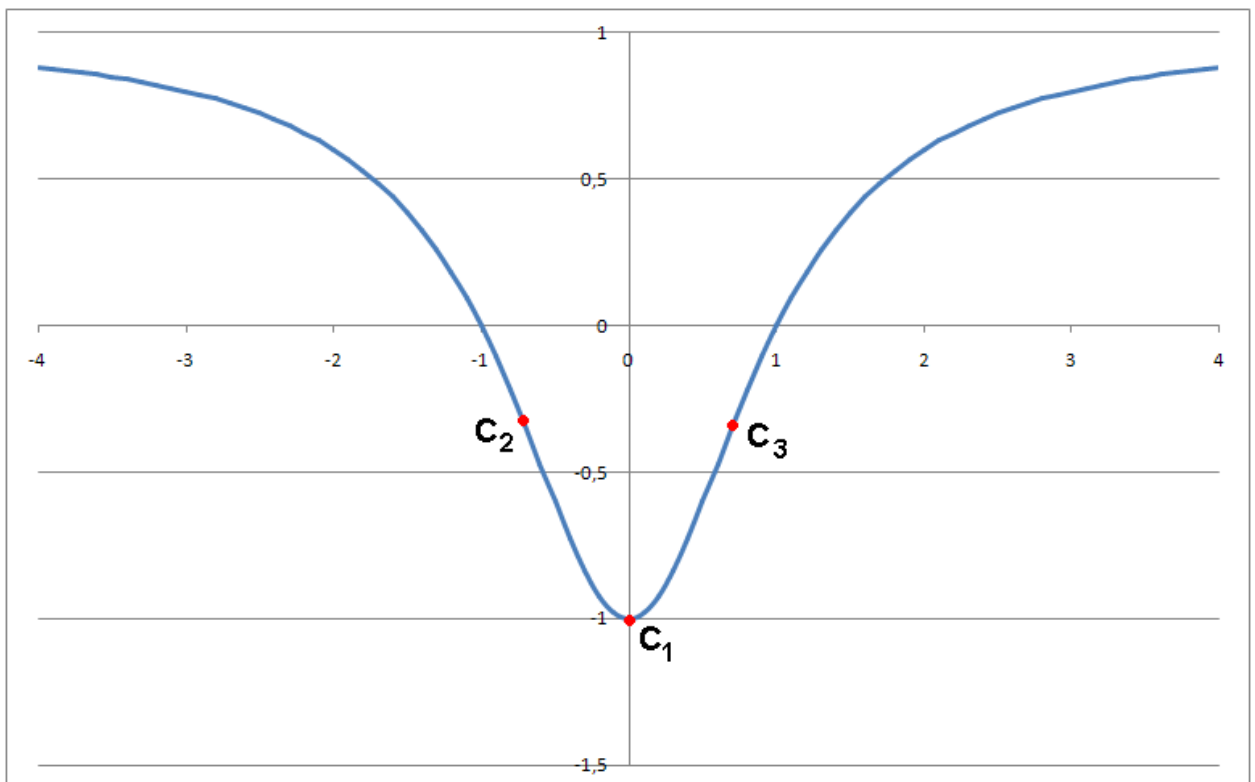
В этой точке  $y = \frac{(\sqrt{0,5})^2 - 1}{(\sqrt{0,5})^2 + 1} = \frac{-0,5}{1,5} = \frac{1}{3}$ . Отсюда делаем вывод, что функция две точки перегиба  $C_2(-\sqrt{0,5}; 1/3)$  и  $C_3(+\sqrt{0,5}; 1/3)$ .

Поскольку знаменатель  $x^2 + 1$  всегда имеет положительное значение, то ясно, что вторая производная будет положительна если положителен будет числитель  $1 - 2x^2 > 0$  или  $x^2 < 0,5$  или  $-\sqrt{0,5} < x < +\sqrt{0,5}$ .

Следовательно, вторая производная будет отрицательна в интервале  $[-\infty; -\sqrt{0,5}]$ , положительна в интервале  $[-\sqrt{0,5}; +\sqrt{0,5}]$  и снова отрицательна в интервале  $[+\sqrt{0,5}; +\infty]$ .

По первому достаточному признаку точки перегиба, если вторая производная меняет знак с минуса на плюс, то слева от точки  $x = -\sqrt{0,5}$  лежит участок выпуклости, а справа – вогнутости. Соответственно, слева от точки  $x = +\sqrt{0,5}$  лежит участок вогнутости, а справа – выпуклости.

6) С учетом выше найденного строим график функции:



**Контрольная работа № 3**  
**«Техника интегрирования и приложения определенного интеграла»**

В задачах **201 – 220** найти неопределенные интегралы.

**220.** а)  $\int \frac{x-5}{x^2} \frac{x+1}{x^2} dx$ ;    б)  $\int e^x \sin e^x dx$ ;    в)  $\int \ln 7 x dx$ .

а)  $\int \frac{x-5}{x^2} \frac{x+1}{x^2} dx$

Раскроем скобки в числителе и разделим на знаменатель, а затем вычислим интеграл как сумму интегралов:

$$\int \frac{(x-5)(x+1)}{x^2} dx = \int \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2} dx = \int \left( 1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} \right) dx =$$

$$= \int 1 dx + \int \frac{4}{x} dx + \int \frac{5}{x^2} dx = x + 4 \ln |x| - \frac{5}{x} + C =$$

$$= x + \ln x^4 - \frac{5}{x} + \ln C = x + \ln Cx^4 - \frac{5}{x} = \frac{x^2 + \ln Cx^4 - 5}{x}$$

б)  $\int e^x \sin e^x dx$ ;

Произведем замену переменной.

Пусть  $e^x = u$ , тогда  $du = e^x dx$ . В итоге получаем более простой интеграл тригонометрической функции:

$$\int e^x \sin e^x dx = \int \sin e^x d(e^x) = -\cos e^x + C$$

в)  $\int \ln 7 x dx$ .

Поскольку  $\ln 7 \approx 1,945910149055$  является постоянной величиной, то может быть вынесен за знак интеграла:

$$\int (\ln 7) \cdot x dx = (\ln 7) \cdot \int x dx = (\ln 7) \cdot \frac{x^2}{2} + C = \ln 7 \frac{x^2}{2} + \ln C = \ln \left( C \cdot 7^{\frac{x^2}{2}} \right)$$

В задачах **221 – 240** вычислить определенные интегралы.

$$\mathbf{240.} \quad \text{a)} \quad \int_1^{e^2} \frac{2\sqrt{x} + 5 - 7x}{x} dx; \quad \text{б)} \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - x) \cos 2x dx.$$

$$\text{a)} \quad \int_1^{e^2} \frac{2\sqrt{x} + 5 - 7x}{x} dx$$

Разделим числитель на знаменатель, а затем вычислим интеграл как сумму интегралов:

$$\int_1^{e^2} \frac{2\sqrt{x} + 5 - 7x}{x} dx = \int_1^{e^2} \left( \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x} - 7 \right) dx = \int_1^{e^2} \frac{2}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{e^2} \frac{5}{x} dx - \int_1^{e^2} 7 dx =$$

$$= 4\sqrt{x} \Big|_1^{e^2} + 5 \ln |x| \Big|_1^{e^2} - 7x \Big|_1^{e^2} = (4\sqrt{e^2} - 4\sqrt{1}) + (5 \ln e^2 - 5 \ln 1) - (7e^2 - 7 \cdot 1) =$$

$$(4e - 4) + (5 \cdot 2 - 5 \cdot 0) - (7e^2 - 7) = 4e - 7e^2 + 13 \approx 4 \cdot 2,718 - 7 \cdot 2,718^2 + 13 = -27,85$$

$$\text{б)} \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - x) \cos 2x dx$$

Раскроем скобки, а затем вычислим интеграл как сумму интегралов:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - x) \cdot \cos 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \cos 2x dx$$

Первый интеграл берется обычным способом:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx = x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

Второй интеграл возьмем по частям:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x dx = dv \\ x = u \end{array} \right| \begin{array}{l} v = \sin x \\ du = dx \end{array} = x \cdot \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{4} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{8}$$

Суммируя первый и второй интегралы, получаем окончательно:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - x) \cdot \cos 2x dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{8} = \frac{2\pi + \pi\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{8} = \frac{2 \cdot 3,14 + 3,14\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{8} = 2,05$$

В задачах **241 – 260** найти площади фигуры, ограниченных линиями. Сделать чертеж.

**260.**  $y = x^3$ ,  $y = 4x$ .

Линия  $y = x^3$  является кубической параболой, линия является прямой. Обе линии проходят через начало координат, которое является их точкой симметрии. Поэтому достаточно найти площадь правой фигуры, ограниченной этими линиями, и затем умножить её на 2.

Вначале, приравняв правые части уравнений линий, найдем ординату  $x$ , при которой линии пересекаются:

$$x^3 = 4x \quad \rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

В общем виде площадь фигуры будет равна разности определенных интегралов функций  $y = 4x$  и  $y = x^3$  на интервале от начала координат, где  $x = 0$ , до точки пересечения линий, где  $x = 2$ :

$$\int_0^2 4x \, dx - \int_0^2 x^3 \, dx = \left. \frac{4x^2}{2} \right|_0^2 - \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^2 = (2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 0^2) - \left( \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right) =$$

$$= (8 - 0) - (4 - 0) = 8 - 4 = 4 \text{ (кв.ед.)}$$

$$\text{Тогда } S = 2 \cdot 4 = 8 \text{ (кв.ед.)}$$

**280.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $y = x^3$ ,  $y = 1$ ,  $x = 0$ .

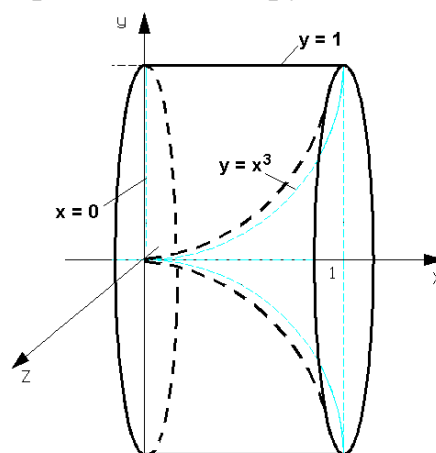
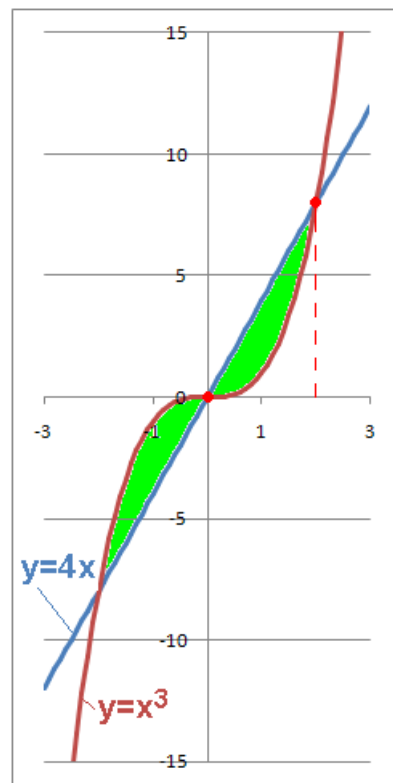
Объем заданного тела будет равен разности объема цилиндра и объема «воронки». Объем цилиндра радиусом  $R = 1$  и высотой  $H = 1$  равен:

$$V_{\text{ц}} = \pi \cdot R^2 \cdot H = 3,14 \cdot 1^2 \cdot 1 = 3,14 \text{ (куб.ед.)}$$

Объем «воронки» найдем как объем тела вращения, у которого известна площадь любого сечения, по формуле:

$$V_B = \int_0^1 S(x) \, dx = \int_0^1 \pi \cdot y^2 \, dx = \pi \cdot \int_0^1 (x^3)^2 \, dx = \pi \cdot \int_0^1 x^6 \, dx = \pi \cdot \left. \frac{x^7}{7} \right|_0^1 = \frac{\pi}{7} = \frac{3,14}{7} = 0,45 \text{ (куб.ед.)}$$

$$\text{Итак, искомый объем равен } V = V_{\text{ц}} - V_B = 3,14 - 0,45 = 2,69 \text{ (куб.ед.)}$$



В задачах **281 – 300** вычислить несобственные интегралы.

**300.**  $\int_{-\infty}^0 e^x dx$ .

Несобственный интеграл находится как предел вычисленного определенного интеграла при стремлении одного из параметров интегрирования к бесконечности:

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} e^x \Big|_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} (e^0 - e^a) = \lim_{a \rightarrow -\infty} (1 - e^a) =$$

$$= 1 - \lim_{a \rightarrow -\infty} e^a = 1 - \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-a}} = 1 - \frac{1}{e^{+\infty}} = 1 - \frac{1}{\infty} = 1 - 0 = 1$$